

黏性流体力学

第 4 章

Navier–Stokes 方程的 典型精确解

从物理假设到方程简化，从解析解到工程直觉

授课教师：徐翱

$$\mu \nabla^2 u = \frac{dp}{dx}$$

$$u(y) = U \frac{y}{h}$$

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\Delta p}{L}$$

学习目标

完成本章学习后，应能够.....

- 根据流动假设系统简化 Navier–Stokes 方程，区分完整方程精确解与近似模型基准解
- 推导平面 Couette 流、平面 Poiseuille 流及 Couette–Poiseuille 组合流的速度分布与壁面剪切
- 推导圆管 Hagen–Poiseuille 流及其流量–压降关系，解释 $Q \propto R^4$ 的工程意义
- 分析重力驱动薄液膜中的速度分布与流量，理解固壁无滑移与自由表面零剪切的不同作用
- 推导 Stokes 第一、第二问题，理解非定常动量扩散和黏性穿透深度 $\delta \sim \sqrt{\nu t}$
- 解释稳态 Couette 流和 Poiseuille 流中的机械功输入与黏性耗散平衡
- 使用 Poiseuille 解析解检查离散方程、边界实现和派生量误差

教学重点与难点

教学重点

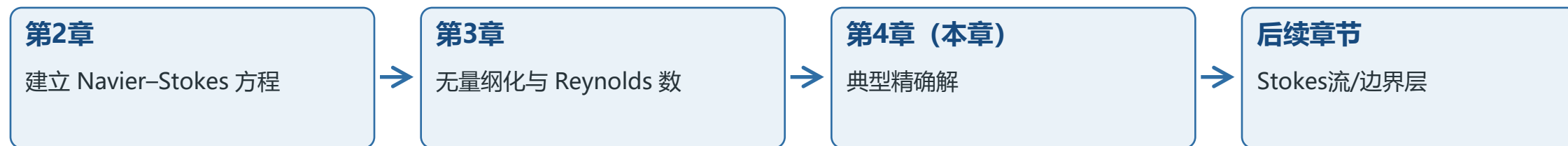
- 从几何、稳态性、对称性出发系统简化 NS 方程
- 定常充分发展单向流的共同 $\mu \nabla_{\perp}^2 u = dp/dx$ 母方程
- 各典型流动的速度分布、剪切应力与流量关系
- Hagen–Poiseuille 定律中 $Q \propto R^4$ 的尺度意义
- Stokes 第一问题的动量扩散图像与 $\delta \sim \sqrt{\nu t}$
- 机械功输入与黏性耗散的能量平衡

教学难点

- 理解非线性对流项为何在单向充分发展流中恰好为零
- 壁面剪切应力的符号判断与外法向约定
- 圆柱坐标中横向 Laplace 算子的正确形式
- Couette–Poiseuille 流中逆向压梯导致局部回流的判断
- Stokes 问题中 $t \rightarrow 0^+$ 壁面剪切奇异的来源
- 区分完整方程精确解与近似模型内的基准解

前章回顾与本章定位

控制方程 → 无量纲化 → 精确解



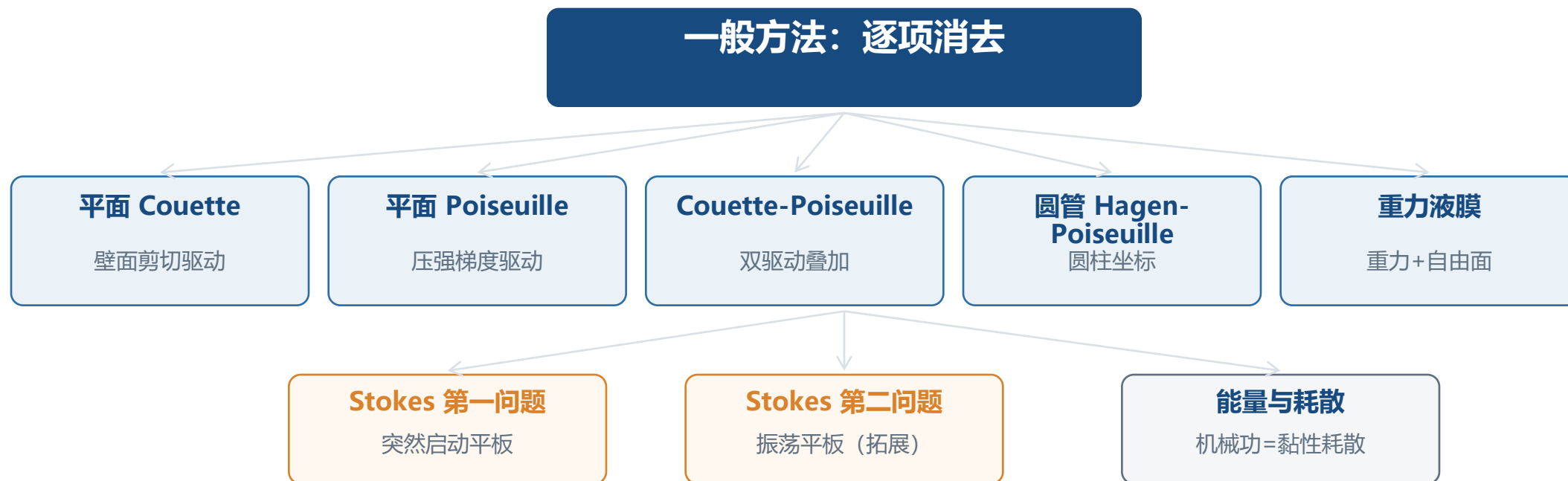
本章核心问题

在什么几何和物理条件下，复杂的非线性 Navier-Stokes 方程可以被简化为可求解的常微分方程？

- 本章结论将在第5章（低 Reynolds 数流动）和第6章（边界层理论）中作为对比基准
- Hagen–Poiseuille 解是管道摩擦计算的起点，也是 CFD 程序验证的标准算例
- Stokes 第一问题的扩散图像为边界层厚度的标度分析提供直接类比

本章知识结构

一条主线：物理假设 → 方程简化 → 解析解 → 物理图像



共同产出

速度分布 · 壁面剪切应力 · 流量/平均速度 · 无量纲普适形式 · 工程应用 · CFD验证基准

工程问题导入

为什么需要求解黏性流动的精确解？

管道输运

石油、天然气、水在管道中的层流输送 管径变化如何影响流量？压降如何计算？

润滑与密封

轴承间隙中的黏性剪切流 壁面运动与压强梯度共同作用 摩擦力矩与功率损耗

微尺度与生物流动

微流控芯片、毛细管、血液流动 特征尺度小，黏性主导 精确解是设计的基础

精确解的工程价值

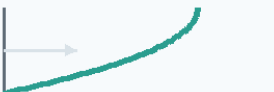
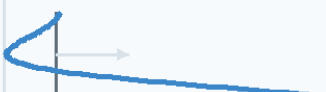
- 低 Re 或充分发展条件下，精确解直接给出工程设计所需的流量、压降和剪切力
- 精确解是 CFD 数值程序验证的黄金标准——网格、边界条件、求解器是否正确，一测便知
- 精确解揭示的物理机制（动量扩散、壁面剪切、能量耗散）是理解复杂流动的基础

本章典型流动总览

不同驱动方式与边界条件决定速度剖面

典型黏性流动：驱动、边界、剖面与能量

同一控制方程因驱动与边界条件不同而产生不同的基准解

流动	驱动方式	关键边界	定性速度剖面	机械能输入
Couette	运动壁面	两壁无滑移		壁面做功
平面 Poiseuille	压强梯度	两壁无滑移		压强做功
组合流	壁面 + 压强	给定两壁速度		壁面 + 压强
圆管 Poiseuille	压强梯度	壁面无滑移; 轴线正则		压强做功
重力液膜	沿板重力	固壁无滑移; 自由面零剪切		重力做功
Stokes I	壁面突然启动	壁面阶跃; 远场静止		壁面功 + 动量储存
Stokes II	壁面周期振荡	周期壁面; 远场静止		周期壁面做功

稳态：外界机械功持续补偿黏性耗散 · 非稳态：还可能改变流体中的动量与动能储存

4.1 求解典型黏性流动的一般方法

七步法：从几何到无量纲物理解读

- | | | |
|---|-----------|----------------------------------|
| 1 | 明确几何和坐标系 | 平行平板→直角坐标；圆管→圆柱坐标 |
| 2 | 写出完整控制方程 | 不可压缩常黏度Newton流体的完整NS方程 |
| 3 | 逐条使用物理假设 | 稳态/单向/充分发展/轴对称，明确每项消除了什么 |
| 4 | 应用边界条件 | 无滑移/对称/自由表面零剪切/指定压强 |
| 5 | 积分求解 | PDE简化为ODE后再积分 |
| 6 | 计算派生量 | 流量Q/平均速度 U_b /最大速度/壁面剪切/压降 |
| 7 | 无量纲化与物理解读 | $u^*=f(y^*)$ ，观察哪些参数决定形状、哪些只决定幅值 |

定常充分发展单向流的一般化简

所有平行流问题的共同起点

流动假设

- 无体力、恒截面直通道
- 稳态: $\partial/\partial t = 0$
- 单向流动: $u = (u(x, y, z), 0, 0)$
- 充分发展: 速度剖面不沿流向变化

连续性方程推论

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

因 $v=w=0 \rightarrow \partial u/\partial x = 0$

故 $u=u(y,z), p=p(x)$

x 方向动量方程 (非定常项和对流项全部消失)

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

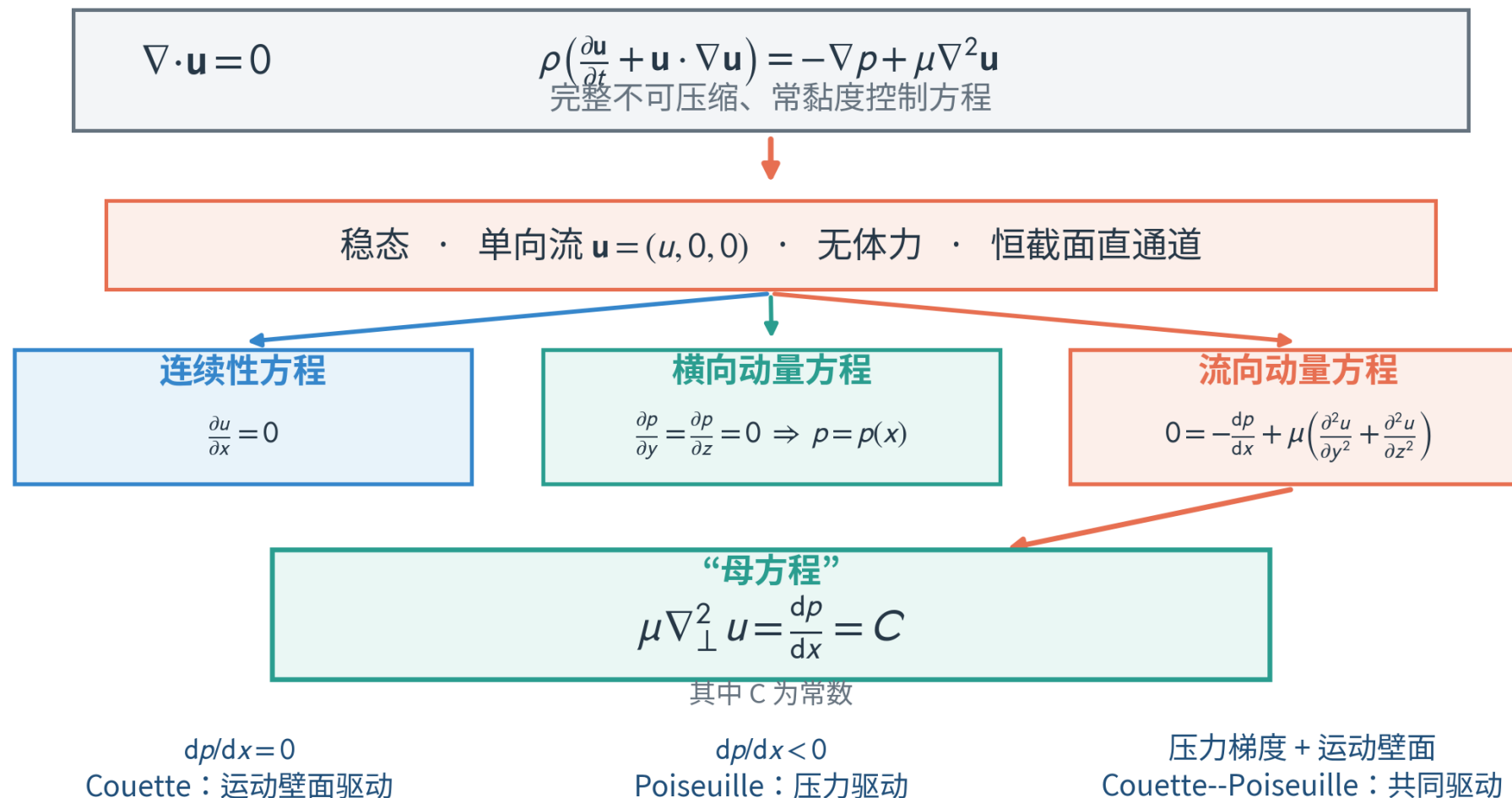
$$\mu \nabla^2 u = \frac{dp}{dx} = \text{常数}$$

这是后面所有经典平行流解的"母方程": Couette流 $dp/dx=0$; Poiseuille流 $dp/dx \neq 0$

从完整 NS 方程到母方程

逐项消去的可视化路径

定常充分发展单向流：Navier--Stokes 方程如何化简？



课堂互动

预测性问题：以下假设分别消去方程中的哪一项？

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

单向流动 $v = 0 \rightarrow$ 消去哪一项？

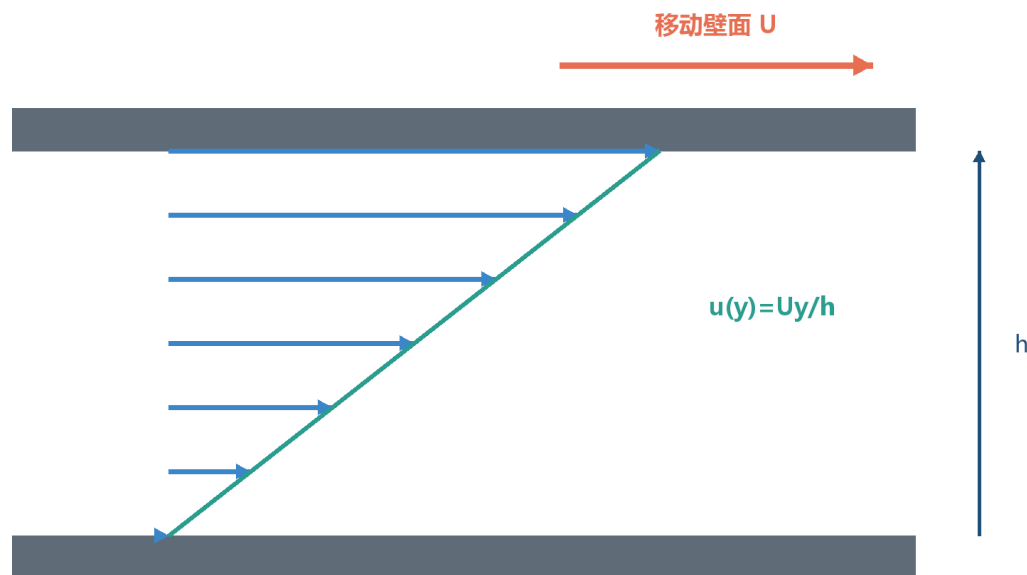
A. $v \frac{\partial u}{\partial y}$ B. $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ C. 压力项

无压强梯度 $\partial p / \partial x = 0 \rightarrow$ 消去哪一项？

A. 压力梯度项 B. 黏性项 C. 对流项

4.2 平面 Couette 流：物理模型

壁面剪切驱动的最简单黏性流动



压强梯度为零时，壁面运动与黏性共同建立线性速度分布

平面 Couette 流几何与线性速度分布

几何与物理假设

- 两块无限大平行平板，间距 h
- 下板 $y=0$ 静止；上板 $y=h$ 以速度 U 沿 x 方向运动
- 不可压缩 Newton 流体
- 流动达到稳态
- 忽略压强梯度和体力
- 平板无限大且充分发展 $\rightarrow u = (u(y), 0, 0)$

控制方程逐项简化

每一个假设消去哪些项？

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

稳态

$$\partial u / \partial t = 0$$

→ 非定常项消失

充分发展

$$\partial u / \partial x = 0$$

→ 对流项 $u \partial u / \partial x$ 和黏性项 $\partial^2 u / \partial x^2$ 消失

单向流动

$$v = 0$$

→ 对流项 $v \partial u / \partial y$ 消失

无压强梯度

$$\partial p / \partial x = 0$$

→ 压力梯度项消失

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 0$$

复杂的非线性偏微分方程，在四条物理假设下简化为最简单的二阶常微分方程

边界条件与速度分布

无滑移条件确定积分常数

求解过程

- Step 1: 控制方程 $d^2u/dy^2 = 0$
- Step 2: 积分一次 $\rightarrow du/dy = C_1$
- Step 3: 积分二次 $\rightarrow u = C_1y + C_2$
- Step 4: 代入无滑移条件 $u(0) = 0, \quad u(h) = U$
- $y=0$: $C_2 = 0$
- $y=h$: $C_1 = U/h$
- Step 5: 最终速度分布

$$u(y) = U \frac{y}{h}$$

速度沿 y 呈线性分布。无量纲形式: $u^* = y^*$

物理解读

- 速度剖面是直线——因为没有压强梯度，黏性应力在流场中处处相等
- 上板通过黏性剪切将动量传递给流体
- 动量从运动壁面逐层传递到静止壁面
- 黏度 μ 不出现在速度剖面中——给定壁面速度时， μ 只改变维持运动所需的剪切力
- 不同 U 、 h 、 μ 的 Couette 流归一化后具有同一条剖面

剪切应力、流量与平均速度

从速度分布计算派生量

壁面剪切应力

$$\tau_{xy} = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{U}{h}$$

- 剪切应力在整个流体中保持常数
- 运动壁面输入的切向动量通过黏性传遍整个流体层
- τ 与 μ 成正比——这就是为什么黏度不出现在速度中，但出现在应力中

单位宽度流量与平均速度

$$q = \int_0^h u(y) dy = \frac{Uh}{2}$$
$$U_b = \frac{q}{h} = \frac{U}{2}$$

- 平均速度恰好等于两壁速度的算术平均值
- 线性剖面的质心位于几何中心

关键认识：速度剖面与黏度无关，但剪切应力与黏度成正比

这是因为：速度由运动学边界条件决定，而应力需要动力学关系 $\tau = \mu(du/dy)$ 来计算。 μ 越大，维持同一速度梯度所需的切向力就越大。

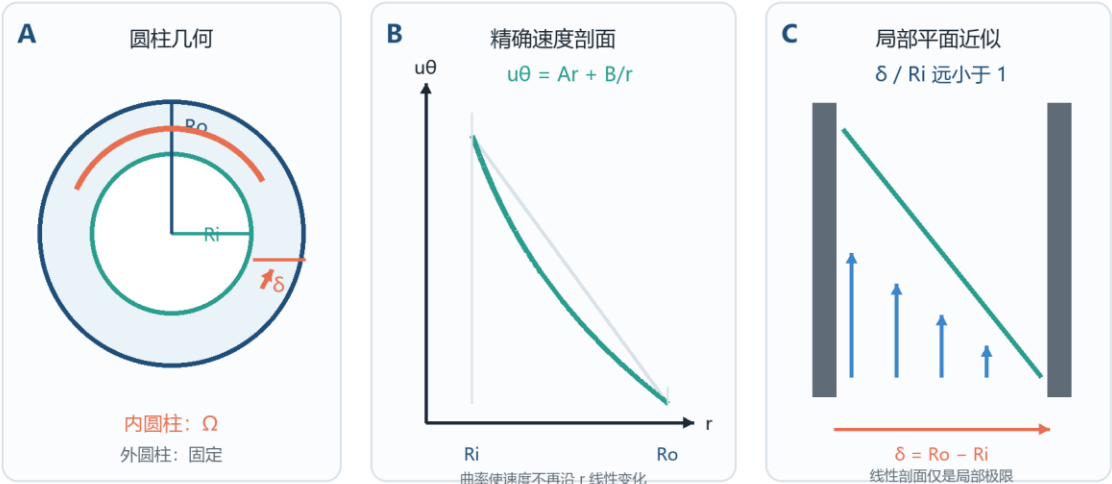
无量纲形式： $u^* = u/U, y^* = y/h \Rightarrow u^* = y^*$ —— 所有 Couette 流归一化后重合为同一条直线

思考：如果 h 减半而 U 不变，壁面剪切应力如何变化？（答案： $\tau = \mu U/h$ ， h 减半则 τ 加倍）

工程近似：窄间隙旋转黏度计

Couette 流的经典工程应用

同轴圆柱黏度计：精确模型与窄间隙近似



圆柱精确模型：速度含 Ar 与 B/r 两部分，保留 R_i 、 R_o 曲率效应
窄间隙模型：线性剖面只在 δ / R_i 很小时成立；实际仪器还需评估端部效应

窄间隙旋转黏度计的 Couette 流近似

窄间隙近似条件

$$\delta = R_o - R_i \ll R_i$$

- 内圆柱半径 R_i ，外圆柱半径 R_o ，有效高度 H_g
- 外圆柱固定，内圆柱以角速度 Ω 旋转
- 内圆柱表面切向速度 $U_i = \Omega R_i$
- 局部间隙近似为平面 Couette 流： $du/dy \approx \Omega R_i / \delta$
- 内圆柱剪切应力 $\tau_i \approx \mu \Omega R_i / \delta$
- 黏性力矩 $M = \tau_i (2\pi R_i H_g) R_i$

$$\mu \approx \frac{M \delta}{2\pi \Omega R_i^3 H_g}$$

圆柱 Couette 精确解 vs 窄间隙近似

区分完整方程精确解与近似模型基准解

保留曲率的精确解

$$u_{\theta}(r) = \frac{\Omega R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \left(\frac{R_o^2}{r} - r \right)$$

$$M = \frac{4\pi\mu\Omega H_g R_i^2 R_o^2}{R_o^2 - R_i^2}$$

$$\mu = \frac{M(R_o^2 - R_i^2)}{4\pi\Omega H_g R_i^2 R_o^2}$$

边界条件: $u_{\theta}(R_i) = \Omega R_i$, $u_{\theta}(R_o) = 0$

窄间隙工程近似

$$\mu \approx \frac{M\delta}{2\pi\Omega R_i^3 H_g}$$

- 令 $R_o = R_i + \delta$, 取 $\delta/R_i \ll 1$
- 精确解退化为线性剪切近似
- 这是具有明确小参数的工程近似
- 不是任意间隙下的圆柱精确解
- 实际仪器还需评估端部效应

重要区分: 完整方程精确解 vs 近似模型内的基准解

本章所称"Navier-Stokes精确解", 是指速度场代回完整不可压缩NS方程后逐点成立。如果求解前引入了窄间隙、薄层等渐近近似, 所得公式只是近似模型内的精确基准解, 不应被表述为原始几何中完整方程的无条件精确解。

课程思政: 科学建模的严谨性——明确近似条件是工程师的基本素养, 也是对工程安全的责任

课堂互动

概念辨析：为什么 Couette 流速度剖面与黏度 μ 无关？

如果两种流体的黏度分别为 μ_1 和 $\mu_2=2\mu_1$ ，在相同的 U 和 h 下做平面 Couette 流，它们的速度剖面 $u(y)$ 是否相同？壁面剪切应力是否相同？

A

速度剖面相同，剪切应力相同

B

速度剖面相同，剪切应力不同

C

速度剖面不同，剪切应力相同

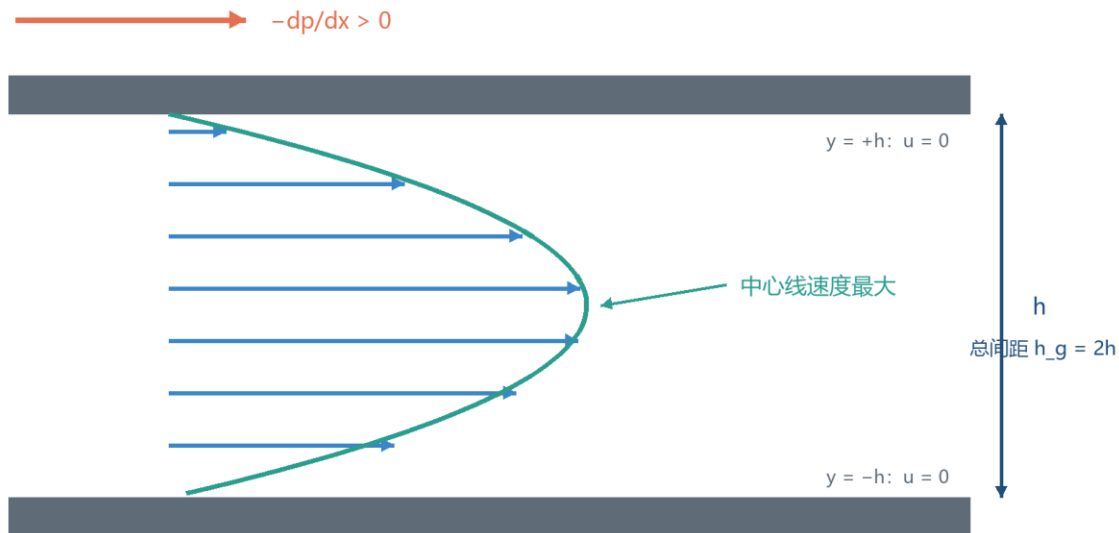
D

速度剖面不同，剪切应力不同

(建议先独立思考，再讨论)

4.3 平面 Poiseuille 流：物理模型

压强梯度驱动两静止平行壁面间的流动



两壁无滑移，压强梯度驱动抛物线速度剖面

图4-4 平面 Poiseuille 流：抛物线速度剖面

几何与假设

- 两块静止无限大平行平板
- 位于 $y = \pm h$ (h 是半间距!)
- 总间距 $h_g = 2h$
- 流体在压强梯度作用下沿 x 方向运动
- 不可压缩 Newton 流体
- 稳态、二维、充分发展、单向
- 可忽略体力 $\rightarrow u = (u(y), 0, 0)$
- 通常压强沿流向降低: $\frac{dp}{dx} < 0$

注意：本节 h 表示中心线到壁面的距离（半间距），总间距为 $2h$ 。若其他教材以总间距建立公式，比较前应先代入 $h = \frac{h_g}{2}$ ，否则流量中三次方会造成常数因子错误。

控制方程与速度分布

压强梯度与黏性扩散的平衡

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

Step 1

改写为 $d^2 u / dy^2 = (1/\mu)(dp/dx)$

Step 2

积分一次: $du/dy = (1/\mu)(dp/dx)y + C_1$

Step 3

积分二次: $u = (1/2\mu)(dp/dx)y^2 + C_1 y + C_2$

Step 4

无滑移 $u(\pm h)=0$; 由对称性 $C_1=0$

Step 5

代入得 $C_2 = -(1/2\mu)(dp/dx)h^2$

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (h^2 - y^2)$$

因为 $dp/dx < 0$, 所以 $u > 0$ 。中心线 $y=0$ 处速度最大: $U_{\max} = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx}$

最大速度与无量纲普适形式

抛物线剖面的结构与参数分离

最大速度

$$U_{\max} = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx}$$

- 位于中心线 $y = 0$ 处
- 压强梯度越大（越负），最大速度越大
- 通道越宽（ h 越大），最大速度越大（ h^2 关系）
- 黏度越大，最大速度越小

无量纲普适形式

$$\frac{u}{U_{\max}} = 1 - y^{*2}, \quad y^* = \frac{y}{h}$$

- 以 $U_{\max}$ 归一化速度，以 h 归一化坐标
- 不同压强梯度、黏度和通道宽度下的剖面塌缩为同一条抛物线
- 有量纲参数决定幅值，无量纲形式揭示共同结构

Couette 流 vs Poiseuille 流：为什么一个是直线，一个是抛物线？

Couette 流： $d^2u/dy^2 = 0$

没有压强梯度，黏性应力处处相等，速度梯度为常数 → 直线

Poiseuille 流： $\mu d^2u/dy^2 = dp/dx = \text{常数}$

压强梯度持续输入动量，黏性向两侧壁面输运，速度梯度线性变化 → 抛物线

流量、平均速度与最大速度关系

抛物线剖面的积分特征

单位展向宽度流量

$$q = \int_{-h}^h u(y) dy = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \int_{-h}^h (h^2 - y^2) dy$$

$$q = -\frac{2h^3}{3\mu} \frac{dp}{dx}$$

$q \propto h^3$ —— 通道半宽的三次方

平均速度

$$U_b = q / (2h)$$

$$U_b = -\frac{h^2}{3\mu} \frac{dp}{dx}$$

平均速度是流量除以总间距 $2h$ ，不是除以 h

平面 Poiseuille 流的重要关系

$$U_{\max} = \frac{3}{2} U_b$$

为什么 $U_{\max} = 3/2 U_b$ 而不是 $2 U_b$?

抛物线剖面 $u = U_{\max}(1 - y^2)$ 在 $[-1, 1]$ 上的平均值为 $\int_{-1}^1 (1 - y^2) dy / 2 = (2 - 2/3) / 2 = 2/3$ ，因此 $U_b = (2/3) U_{\max}$ ，即 $U_{\max} = (3/2) U_b$ 。

剪切应力分布

从速度梯度到壁面剪切力

剪切应力计算

$$\text{速度梯度: } \frac{du}{dy} = \frac{y}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

$$\text{Newton黏性定律: } \tau_{xy} = \frac{dp}{dx} y$$

- 内部剪切应力随 y 线性变化
- 中心线 $y=0$ 处 $\tau=0$ (对称, 速度梯度为零)
- 壁面处剪切大小最大: $|\tau_w| = -h \frac{dp}{dx}$
- 上壁 $y=h$: $\tau < 0$; 下壁 $y=-h$: $\tau > 0$

壁面牵引方向判断 (易错点)

- 流体域外法向: 上壁 $n_f = +e_y$, 下壁 $n_f = -e_y$
- 两侧壁面对流体的切向牵引都沿负 x 方向 (阻碍流动)
- 内部应力分量 τ_{xy} 的符号 $\neq$ 壁面牵引方向
- 必须通过外法向 n_f 联系起来: $t = \sigma \cdot n$
- 这是第2章壁面剪切符号约定的直接应用

物理图像: 压强梯度驱动 vs 壁面剪切阻碍

压强梯度沿流向持续输入动量, 黏性将动量输运到两侧壁面, 壁面剪切承担相应的动量通量。稳态充分发展流动之所以能维持, 正是因为压强驱动与黏性输运达到平衡。中心线剪切为零是对称性的必然结果——那里速度梯度为零。

数字赋能：用 Poiseuille 解析解验证 CFD 程序

精确解是数值程序可靠性的黄金标准

验证算例设置

- 无量纲边值问题： $d^2u^*/dy^{*2} = -2$, $u^*(\pm 1)=0$
- 解析解： $u^* = 1 - y^{*2}$
- 区间 $[-1,1]$ 等分为 N 个单元, $\Delta y^* = 2/N$
- 内部节点采用二阶中心差分
- 形成三对角线性方程组
- 用 E_∞ 和 E_2 检查速度误差

$$\frac{u_{j+1}^* - 2u_j^* + u_{j-1}^*}{(\Delta y^*)^2} = -2$$

$$E_\infty = \max_j |u_j^{num} - u_j^{exact}|, \quad E_2 = \left[\frac{1}{N+1} \sum_j (u_j^{num} - u_j^{exact})^2 \right]^{1/2}$$

关键洞察：

中心二阶差分能精确表示二次多项式的二阶导数，因此节点解应与解析解一致到舍入误差。这能检查源项符号、边界条件和线性求解器，但不能单凭此宣称二阶收敛性。

派生量收敛：壁面梯度

$$\left. \frac{du^*}{dy^*} \right|_1 \approx \frac{u_N^* - u_{N-1}^*}{\Delta y^*} = -2 + \Delta y^*$$

壁面剪切相对误差 = $\Delta y^*/2 = 1/N$

N	Δy^*	相对误差	观测阶p
8	0.25	12.5%	--
16	0.125	6.25%	1.00
32	0.0625	3.125%	1.00
64	0.03125	1.5625%	1.00

教学意义：

把"解对了"和"派生量也按预期收敛"区分开来。速度解精确到舍入误差，但一阶壁面梯度只有一阶收敛。要验证二阶格式应改用二阶单边差分或非二次制造解。

课堂互动

推理题：平面 Poiseuille 流中 $U_{\text{max}} / U_{\text{b}} = ?$

已知平面 Poiseuille 流速度分布 $u(y) = U_{\text{max}}[1-(y/h)^2]$ ，不看公式，仅凭抛物线的几何直觉，判断平均速度 U_{b} 与最大速度 U_{max} 的比值。

A

$U_{\text{b}} = U_{\text{max}} / 2$ (抛物线面积是矩形的一半)

B

$U_{\text{b}} = 2 U_{\text{max}} / 3$ (抛物线积分的平均值)

C

$U_{\text{b}} = 3 U_{\text{max}} / 4$ (更接近最大值)

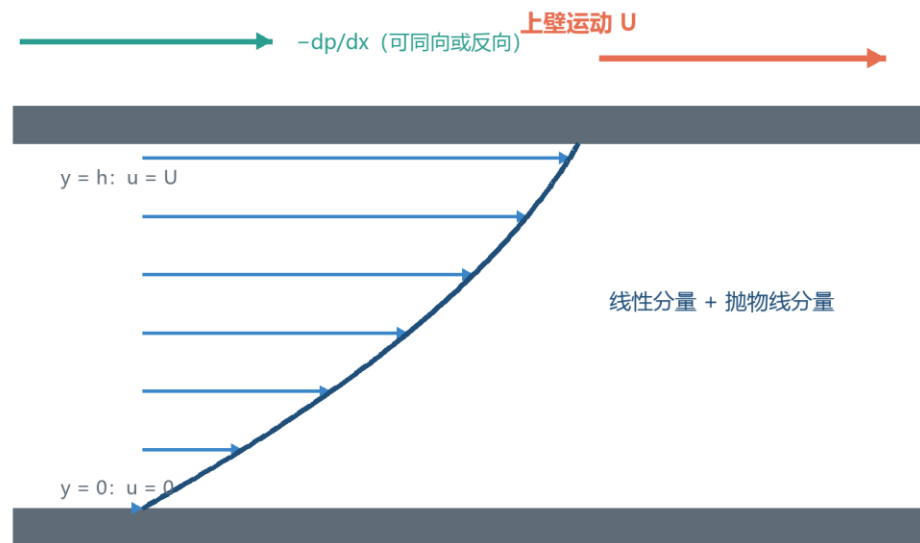
D

$U_{\text{b}} = U_{\text{max}}$ (充分发展流速度均匀)

(提示：在 $[-1,1]$ 区间上积分 $1-y^2$ ，再除以区间长度 2)

4.4 Couette–Poiseuille 组合流

壁面运动与压强梯度的叠加



壁面剪切驱动与压强驱动的线性叠加

Couette-Poiseuille 组合流：线性分量与抛物线分量叠加

物理模型与控制方程

- 下壁 $y=0$ 静止
- 上壁 $y=h$ 以速度 U 沿 x 方向运动
- 同时存在恒定压强梯度 dp/dx
- 稳态、单向、充分发展 $\rightarrow u = (u(y), 0, 0)$
- 控制方程与平面 Poiseuille 相同： $0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$
- 边界条件： $u(0) = 0, \quad u(h) = U$

关键认识：

虽然完整 NS 方程是非线性的，但在单向充分发展特殊流动中，简化后的控制方程变为线性，两种驱动效应可以直接叠加。

速度分布：线性叠加原理

$$u = u_{\text{Couette}} + u_{\text{Poiseuille}}$$

$$u(y) = U \frac{y}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(h - y)$$

Couette 分量 (壁面运动驱动)

$$u_c = U \frac{y}{h}$$

线性分布，从下壁0到上壁U，黏度不影响剖面形状

Poiseuille 分量 (压强梯度驱动)

$$u_p = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(h - y)$$

抛物线分布，两端为零，中心最大，与黏度成反比

线性叠加的物理意义

- 控制方程 $0 = -dp/dx + \mu d^2u/dy^2$ 是线性的：如果 u_1 和 u_2 都是解，那么 $u_1 + u_2$ 也是解
- Couette 分量满足 $d^2u_C/dy^2=0$ (无压强梯度的解)，Poiseuille 分量满足 $\mu d^2u_P/dy^2=dp/dx$ (两壁静止的解)
- 两者叠加后同时满足非齐次方程和非齐次边界条件
- 这是特殊流动简化后的性质——完整 NS 方程的非线性对流项已经消失，不能推广到一般流动

有利压梯与不利压梯

压强梯度可以推动，也可以阻碍流动

有利压强梯度 $dp/dx < 0$

- 压强沿 x 方向降低
- 压强梯度与上壁运动共同推动流动
- 速度剖面在 Couette 直线基础上向上凸出
- 整个流场速度方向与上壁一致
- 流量增大: $q = \frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right)$

不利压强梯度 $dp/dx > 0$

- 压强沿 x 方向升高
- 压强梯度阻碍壁面驱动的流动
- 速度剖面在 Couette 直线基础上向下凹陷
- 当不利压梯足够强时，靠近下壁的流体会反向运动
- 局部速度方向不只由壁面方向决定

下壁附近出现反向流的条件

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \frac{U}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h < 0 \rightarrow \text{即 } \frac{dp}{dx} > \frac{2\mu U}{h^2} \text{ 时, 下壁附近速度梯度为负, 可能出现回流}$$

工程联系: 这种“运动壁面推动+压强反向抵消”的情形在润滑流动和输运问题中很常见。润滑理论中，轴颈的旋转（Couette效应）与楔形间隙的压强升高（Poiseuille效应）共同作用，产生承载能力。反向流的出现可能导致润滑失效。

流量与零流量条件

$$q = q_{\text{Couette}} + q_{\text{Poiseuille}}$$

$$q = \frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx}$$

Couette 流量分量

$$q_C = Uh/2$$

由运动壁面直接输运，与黏度无关

Poiseuille 流量分量

$$q_P = -h^3(dp/dx)/(12\mu)$$

由压强梯度驱动，与黏度成反比，与 h^3 成正比

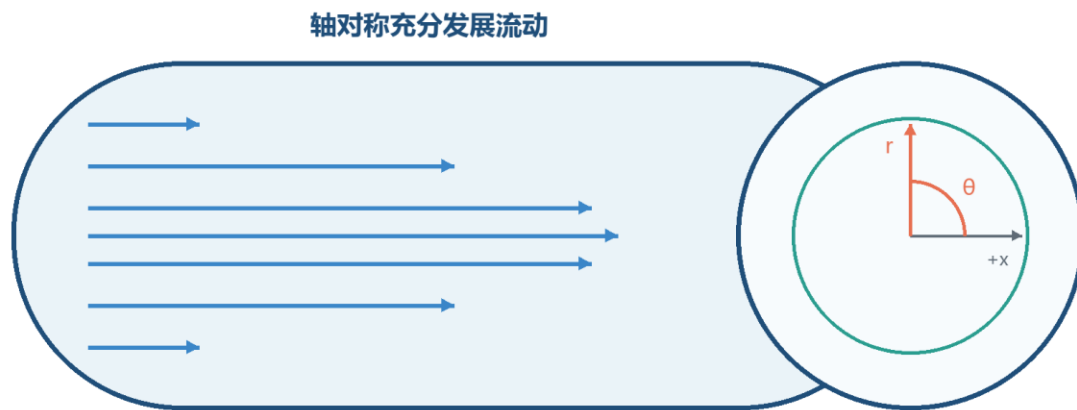
零流量条件（净流量为零）

$$\text{令 } q = 0: \frac{dp}{dx} = \frac{6\mu U}{h^2}$$

- 此时 Couette 驱动的正向流量恰好被不利压强梯度驱动的反向流量抵消
- 速度剖面中存在一个驻点（ $u=0$ 的位置），驻点上下流体反向运动
- 这在密封、润滑和某些微流控应用中是重要的工作状态

4.5 Hagen–Poiseuille 圆管流：物理模型

圆柱坐标中的轴对称黏性流动



$$u(r) = u_{\max} [1 - (r/R)^2]$$

圆管流轴对称速度分布与圆柱坐标系

几何与假设

- 半径为 R 的圆形直管
- 圆柱坐标 (r, θ, z)
- θ 由 $+x$ 参考射线量至径向 r
- 不可压缩 Newton 流体
- 稳态、轴对称、充分发展、单向
- 压强只沿 z 方向变化
- 轴对称 $\rightarrow$ 所有量不显含 θ
- 速度场: $u_r = u_\theta = 0, \quad u_z = u(r)$

控制方程：圆柱坐标中的黏性算子

从平面到圆柱，Laplace 算子如何变化

$$0 = -\frac{dp}{dz} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right)$$

平面通道（直角坐标）

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp}{dx}$$

横向 Laplace 算子就是简单的二阶导数 d^2/dy^2 ，因为速度只依赖一个横向坐标

圆管（圆柱坐标）

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right)$$

圆柱坐标中轴对称函数的 Laplace 算子包含 $1/r$ 因子和 r 加权，这是极坐标面积元的反映

推导关键步骤

- 沿用稳态、单向、充分发展条件 → 非定常项和对流项消失（与平面流完全相同）
- r 和 θ 方向动量方程 → $\partial p / \partial r = 0, \partial p / \partial \theta = 0 \rightarrow p = p(z)$
- z 方向动量方程中的黏性项改用圆柱坐标形式 → 得到上述方程
- 充分发展要求 $dp/dz = \text{常数}$ （左边只依赖 r ，右边只依赖 z ）

速度分布推导

积分、正则性条件与无滑移边界

Step 1

改写方程: $(1/r) d/dr(r du/dr) = (1/\mu)(dp/dz)$

Step 2

两边乘 r : $d/dr(r du/dr) = (r/\mu)(dp/dz)$

Step 3

积分一次: $r du/dr = (r^2/2\mu)(dp/dz) + C_1$

Step 4

除以 r : $du/dr = (r/2\mu)(dp/dz) + C_1/r$

Step 5

正则性条件: $r=0$ 处速度梯度有限 $\rightarrow C_1 = 0$

Step 6

再次积分: $u = (r^2/4\mu)(dp/dz) + C_2$

Step 7

无滑移条件 $u(R)=0 \rightarrow C_2 = -(R^2/4\mu)(dp/dz)$

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (R^2 - r^2)$$

因为 $dp/dz < 0$, 所以 $u > 0$ 。圆管层流同样具有抛物线速度剖面。

最大速度与无量纲普适形式

圆管抛物线剖面的结构

最大速度

$$U_{\max} = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dz}$$

- 位于管轴中心 $r = 0$ 处
- 与 R^2 成正比（管径影响强烈）
- 与 $|dp/dz|$ 成正比
- 与 μ 成反比

无量纲普适形式

$$\frac{u}{U_{\max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

- 以 $U_{\max}$ 归一化速度，以 R 归一化半径
- 所有圆管层流剖面塌缩为同一条抛物线
- 与平面 Poiseuille 流形式相同 $(1-\xi^2)$

平面 Poiseuille vs 圆管 Poiseuille: 为什么 $U_{\max}/U_b$ 不同?

特征	平面 Poiseuille	圆管 Poiseuille
速度分布	$u = -(h^2 - y^2)dp/dx/(2\mu)$	$u = -(R^2 - r^2)dp/dz/(4\mu)$
$U_{\max}/U_b$	3/2	2
原因	截面积分权重均匀	截面积分含 $2\pi r$ 权重，更多面积在大半径处（低速区）

体积流量与 Hagen–Poiseuille 定律

$Q \propto R^4$ —— 极其重要的尺度关系

流量推导

$$\begin{aligned} Q &= \int_A u \, dA = 2\pi \int_0^R u(r) r \, dr \\ &= -\frac{\pi}{2\mu} \frac{dp}{dz} \int_0^R (R^2 - r^2) r \, dr \end{aligned}$$

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dp}{dz}$$

注意：积分 $\int_0^R (R^2 - r^2) r \, dr = R^4/4$

Hagen–Poiseuille 定律

管长 L , 压差 $\Delta p = p_{\text{in}} - p_{\text{out}} > 0$

$$-dp/dz = \Delta p/L$$

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\Delta p}{L}$$

1839年Hagen和1840年Poiseuille分别独立发现

为什么 $Q \propto R^4$ 极其重要?

- 半径增至2倍 → 流量增至 $2^4 = 16$ 倍! 管径的微小变化显著改变输运能力
- 微流道、毛细管、生物血管中, 特征尺度小, R^4 效应使流动对管径极度敏感
- 管网设计中, 支管直径的选择对系统压降有决定性影响
- 医学上: 血管狭窄 (半径减小) 会导致血流阻力急剧增加, 心脏需要更大功率维持供血
- 工程上: 液压系统管道直径的精确计算是系统的核心

课堂互动

数量级估算：圆管半径增加 10%，流量增加多少？

根据 Hagen–Poiseuille 定律 $Q = (\pi R^4/8\mu)(\Delta p/L)$ ，在其他条件不变时，若圆管半径从 R 增加到 $1.1R$ ，体积流量增加百分之多少？

A

10% (与半径同比例增加)

B

21% (R^2 效应)

C

46% (R^4 效应)

D

100% (翻倍)

(提示： $Q \propto R^4$ ，计算 $(1.1)^4 - 1$)

平均速度与剪切应力

圆管流的派生量

平均速度与最大速度

$$U_b = Q/(\pi R^2)$$

$$U_b = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dz}$$

$$U_{\max} = 2U_b$$

剪切应力分布

$$\tau_{rz} = \frac{r}{2} \frac{dp}{dz}$$

- 从中心的零值线性增加到壁面最大值
- 中心线 $r=0$ 处 $\tau=0$ (对称, 速度梯度为零)
- 壁面剪切大小:

$$|\tau_w| = -\frac{R}{2} \frac{dp}{dz} = \frac{D}{4} \frac{\Delta p}{L}$$

整体动量平衡验证：两种方法得到同一结果

- 取长度 L 、半径 R 的圆柱形控制体
- 入口出口压强净推力: $F_p = \Delta p \cdot \pi R^2$
- 壁面剪切阻力: $F_\tau = |\tau_w| \cdot 2\pi RL$
- 充分发展稳态要求两者平衡: $\Delta p \cdot \pi R^2 = |\tau_w| \cdot 2\pi RL$
- 整理得: $|\tau_w| = (R/2)(\Delta p/L)$ —— 与从速度梯度计算的结果完全一致
- 这说明: 同一个关系既可以从局部微分方程得到, 也可以从整体控制体动量平衡得到, 两种方法应相互验证

4.6 圆管层流的摩擦关系

从 Hagen–Poiseuille 解到 Darcy 摩擦系数

Darcy–Weisbach 关系

$$\frac{\Delta p}{L} = f_D \frac{\rho U_b^2}{2D}$$

- f_D : Darcy 摩擦系数 (无量纲)
- D : 管径, U_b : 截面平均速度
- 这是工程中计算管道压降的标准公式
- 对任何管流 (层流/湍流) 都适用, f_D 需实验或理论确定

从 Hagen–Poiseuille 推导

- Hagen-Poiseuille 给出: $\Delta p/L = 32\mu U_b/D^2$
- 与 Darcy-Weisbach 对比:
- $f_D \cdot \rho U_b^2/(2D) = 32\mu U_b/D^2$
- 整理得: $f_D = 64\mu/(\rho U_b D) = 64/Re_D$

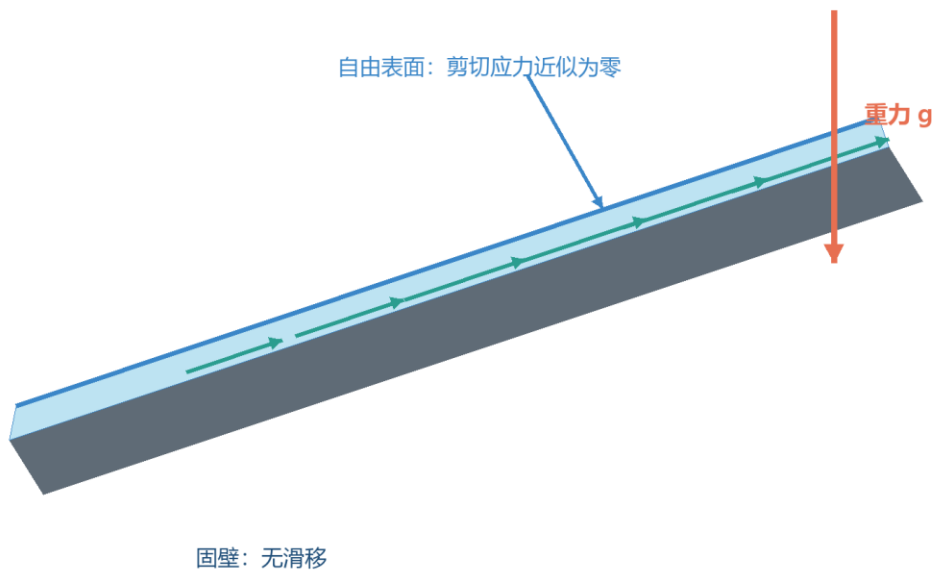
$$f_D = \frac{64}{Re_D}, \text{ 其中 } Re_D = \frac{\rho U_b D}{\mu}$$

注意: Darcy 摩擦系数 vs Fanning 摩擦系数

- 工程文献中还常见 Fanning 摩擦系数 f_F , 满足 $f_D = 4 f_F$
- 因此层流圆管中 $f_F = 16/Re_D$ (不是 $64/Re_D$!)
- 使用经验公式时必须明确采用哪一种摩擦系数定义, 否则差4倍
- 化学工程常用 Fanning, 机械/土木工程常用 Darcy

4.7 重力驱动薄液膜：物理模型

重力与黏性的平衡，一侧固壁一侧自由表面



倾斜平板上的重力驱动薄液膜

几何与假设

- Newton 流体沿倾斜平板向下流动
- x 轴沿平板向下, y 轴垂直平板
- 固壁位于 $y=0$, 自由表面位于 $y=h$
- 平板与水平面夹角为 χ
- 稳态、二维、充分发展
- 忽略自由表面上的气体剪切
- 速度场: $u = (u(y), 0, 0)$
- 重力沿板分量: $g \sin \chi$
- 自由表面暴露于均匀大气压 $\rightarrow dp/dx = 0$

控制方程与边界条件

固壁无滑移 + 自由表面零剪切

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} + \rho g \sin \chi = 0$$

固壁边界 $y = 0$

$$u(0) = 0 \quad (\text{固壁无滑移})$$

流体在固壁处速度为零，这是无滑移条件的直接应用

自由表面 $y = h$

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=h} = 0 \quad (\text{自由表面零剪切})$$

气体剪切可忽略 $\rightarrow \tau_{xy}(h)=0 \rightarrow$ 因 $\mu \neq 0$ ，速度梯度为零。这是自由表面的特征条件

求解过程

- Step 1: $d^2 u / dy^2 = -\rho g \sin \chi / \mu$
- Step 2: 积分一次 $\rightarrow du/dy = -(\rho g \sin \chi / \mu) y + C_1$
- Step 3: 自由表面零剪切 $du/dy|_h = 0 \rightarrow C_1 = (\rho g \sin \chi / \mu) h$
- Step 4: 再次积分 $\rightarrow u = (\rho g \sin \chi / \mu) (hy - y^2/2) + C_2$
- Step 5: 固壁无滑移 $u(0)=0 \rightarrow C_2 = 0$

速度分布、流量与 Poiseuille 流比较

边界条件不同，极值位置不同

$$u(y) = \frac{\rho g \sin \chi}{\mu} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right)$$

最大速度

$$U_{\max} = \frac{\rho g h^2 \sin \chi}{2\mu}$$

位于自由表面 $y=h$ 处 (不是中心线!)

单位宽度流量

$$q = \frac{\rho g h^3 \sin \chi}{3\mu}$$

$q \propto h^3$ —— 液膜厚度的三次方

最大/平均速度比

$$U_{\max} = \frac{3}{2} U_b$$

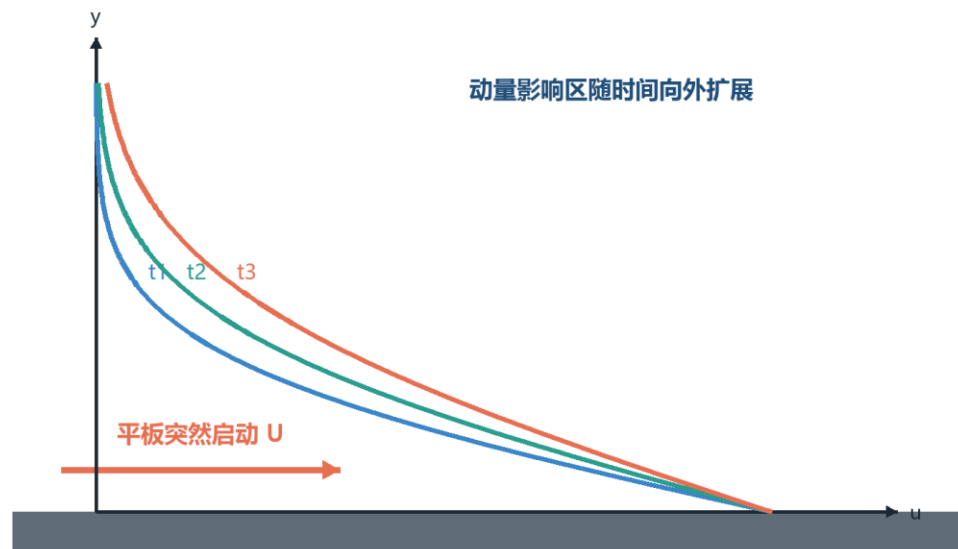
与平面 Poiseuille 流相同!

重力液膜 vs 平面 Poiseuille 流：为什么最大速度位置不同？

特征	平面 Poiseuille 流	重力液膜
驱动力	压强梯度 dp/dx	沿板重力 $\rho g \sin \chi$
两侧边界	两壁均为固壁无滑移	一侧固壁无滑移，一侧自由表面零剪切
最大速度位置	中心线 $y=0$ (两壁中间)	自由表面 $y=h$
速度分布	$u \propto h^2 - y^2$ (关于中心对称)	$u \propto hy - y^2/2$ (不对称)
$U_{\max}/U_b$	3/2	3/2

4.8 Stokes 第一问题：突然启动平板

非定常动量扩散——本章第一个非稳态问题



Stokes第一问题: $t_1 < t_2 < t_3$ 三个时刻的速度剖面

物理模型

- 不可压缩 Newton 流体占据 $y > 0$ 半空间
- $t < 0$: 流体与平板都静止
- $t = 0$: 平板突然以恒定速度 U 沿 x 方向运动
- 平板无限大 $\rightarrow$ 流动只依赖 y 和 t
- 速度场: $u = (u(y, t), 0, 0)$
- 无压强梯度, 无体力
- 这是一个非定常问题——与前面所有稳态问题不同
- 核心物理: 壁面动量如何通过黏性向流体内部扩散

控制方程：一维动量扩散方程

与热扩散方程同形

从完整 NS 方程出发

- x 方向 NS 方程: $\rho(\partial u/\partial t + u\partial u/\partial x + v\partial u/\partial y) = -\partial p/\partial x + \mu(\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2)$
- $u=u(y,t), v=0 \rightarrow \partial u/\partial x=0 \rightarrow$ 对流项 $u\partial u/\partial x=0, v\partial u/\partial y=0, \partial^2 u/\partial x^2=0$
- 无压强梯度 $\rightarrow \partial p/\partial x=0$
- 保留非定常项 (这是与稳态问题的关键区别!) : $\rho \partial u/\partial t = \mu \partial^2 u/\partial y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

物理意义：局部惯性与黏性扩散的平衡

- 左边 $\partial u/\partial t$: 局部加速度——流体微团的动量随时间的变化率 (惯性作用)
- 右边 $\nu \partial^2 u/\partial y^2$: 黏性扩散——动量在法向的输运速率 (黏性作用)
- 方程形式与热扩散方程 $\partial T/\partial t = \alpha \partial^2 T/\partial y^2$ 完全相同
- 运动黏度 ν 在此扮演热扩散率 α 的角色——控制动量向流体内部传播的速率
- 这与第1章建立的动量扩散图像一致：黏性就是动量的扩散性
- 没有对流项，因为单向流动使 $u \cdot \nabla u$ 恰好为零——但非定常项保留了下来

初始条件、边界条件与相似变量

量纲分析构造自相似解

初始条件与边界条件

初始: $u(y, 0) = 0 \quad (y > 0)$

壁面: $u(0, t) = U \quad (t > 0)$

远场: $u(y, t) \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty)$

三个条件确定唯一解: 初始时刻流体静止, 壁面速度为U, 无穷远处流体不受影响

相似变量构造

方程中只有 y, t, ν 三个参数

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$$

η 是唯一可能的无量纲组合

$$\frac{u}{U} = \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)$$

关于余误差函数 erfc

- $\operatorname{erfc}(\eta) = 1 - \operatorname{erf}(\eta)$, 其中 $\operatorname{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-s^2} ds$
- $\eta=0$ (壁面): $\operatorname{erfc}(0)=1 \rightarrow u=U$, 满足壁面无滑移条件
- $\eta \rightarrow \infty$ (远场): $\operatorname{erfc}(\infty)=0 \rightarrow u \rightarrow 0$, 满足远场条件
- 解是自相似的: 不同时刻的速度剖面, 用 η 重新标度后都塌缩为同一条曲线
- 这意味着流动没有固有时间尺度或长度尺度——任何时刻的流态只是扩散过程的一个快照

黏性穿透深度与壁面剪切应力

动量扩散的空间范围和时间演化

黏性穿透深度

$$\delta \sim \sqrt{\nu t}$$

- 从相似变量 $\eta = y/(2\sqrt{\nu t})$ 直接得出
- 速度发生显著变化的典型距离满足 $y \sim \sqrt{\nu t}$
- 时间越长，壁面影响传播得越远
- 运动黏度越大，动量扩散越快
- 影响厚度按 $\sqrt{t}$ 增长，不是线性增长——扩散的典型标度
- 这与第3章量纲分析得到的扩散长度标度一致

壁面剪切应力随时间变化

$$|\tau_w| = \frac{\mu U}{\sqrt{\pi \nu t}} \propto t^{-1/2}$$

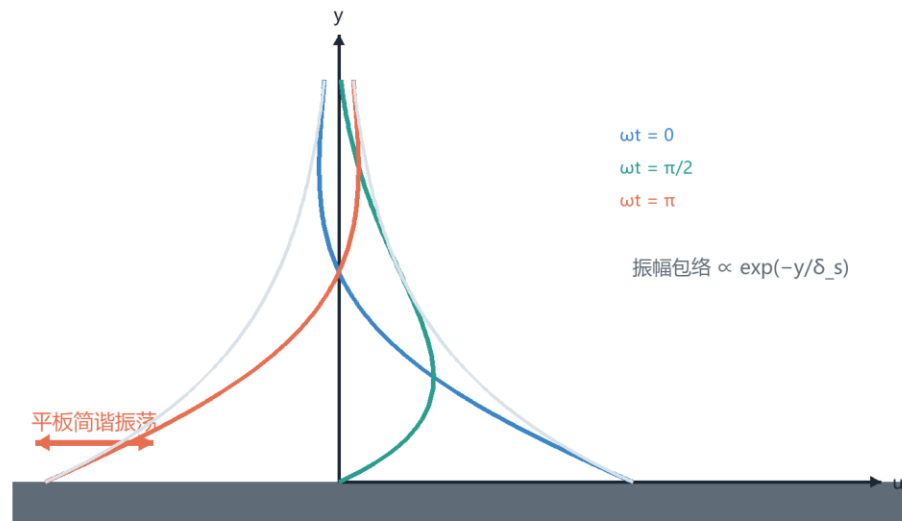
- 平板刚启动时 ($t \rightarrow 0^+$)，速度变化集中在极薄区域
- 壁面梯度和剪切应力都很大（数学上趋于无穷大）
- 随后动量扩散到更厚的流体层，壁面梯度减小
- 剪切应力按 $t^{-1/2}$ 衰减
- $t \rightarrow 0^+$ 的奇异性来自「平板瞬时启动」的理想化假设
- 实际机械系统中平板有加速度，不会产生无穷大剪切

Stokes 第一问题的物理意义与课程思政

- 控制方程与热扩散方程同形，说明壁面输入的动量需要有限时间才能向外传播——这是黏性扩散性的直接体现
- 影响范围 $\delta \sim \sqrt{\nu t}$ 体现典型的扩散标度，为第6章边界层厚度的标度分析提供直接类比
- 虽然没有外部对流，壁面作用集中在一层逐渐扩展区域内的图像，已经蕴含了边界层思想的雏形
- 课程思政：Stokes第一问题由Sir George Stokes在1851年提出，是黏性流体力学的经典基石。我国科学家在黏性流动数值方法（如钱学森先生的边界层理论、郭永怀先生的奇异性分析）方面也有重要贡献。基础研究是工程技术创新的源头。

4.9 拓展：Stokes 第二问题（振荡平板）

周期强迫下的黏性穿透深度



振幅随距离衰减，相位随距离滞后

Stokes第二问题：振幅指数衰减，相位逐渐滞后

问题设置与解

- 半无限流体 $y > 0$ ，平板 $y = 0$ 作简谐运动
- 壁面条件： $u(0, t) = U_0 \cos(\Omega t)$
- 远场： $u(y, t) \rightarrow 0 \ (y \rightarrow \infty)$
- 控制方程仍为 $\partial u / \partial t = \nu \partial^2 u / \partial y^2$
- 稳定周期解：

$$u(y, t) = U_0 e^{-y/\delta_s} \cos\left(\Omega t - \frac{y}{\delta_s}\right)$$

$$\delta_s = \sqrt{\frac{2\nu}{\Omega}}$$

物理解读：

振幅按 e^{-y/δ_s} 指数衰减，相位按 y/δ_s 逐渐滞后。 $\delta_s \propto \sqrt{\nu/\Omega}$
：黏度大 $\rightarrow$ 穿透深；频率高 $\rightarrow$ 限制在更薄的近壁区。这是扩散时间与强迫周期竞争的典型表现。

4.10 典型精确解之间的比较

驱动方式、控制方程与边界条件一览

流动	外部驱动	简化方程	关键边界条件
Couette 流	上壁速度 U	$\mu u''=0$	$u(0)=0, u(h)=U$
平面 Poiseuille	压强梯度 $p_x<0$	$0=-p_x+\mu u''$	$u(\pm h)=0$
Couette-Poiseuille	运动壁面+ p_x	$0=-p_x+\mu u''$	$u(0)=0, u(h)=U$
圆管 Poiseuille	压强梯度 $p_z<0$	$0=-p_z+\mu r^{-1}(ru')'$	$u(R)=0, u'(0)=0$
重力液膜	沿板重力 $g \sin\chi$	$\mu u''+\rho g \sin\chi=0$	$u(0)=0, u'(h)=0$
Stokes 第一	突然启动壁面	$u_t= \nu u_{yy}$	$u(y,0)=0, u(0,t)=U$
Stokes 第二	振荡壁面	$u_t= \nu u_{yy}$	$u(0,t)=U_0\cos\Omega t$

共同特征：所有这些解虽然形式不同，却都表明边界条件和外部驱动力通过黏性作用共同塑造速度分布。稳态问题中压强/壁面/重力驱动与黏性输运达到平衡；非定常问题中局部惯性与黏性扩散达到平衡。

4.11-4.12 压强梯度、黏性与流量的关系

从局部微分到整体动量平衡

局部微分平衡

- 平面 Poiseuille: $-dp/dx + \mu d^2u/dy^2 = 0$
- 圆管流: $-dp/dz + \mu(1/r)d/dr(r du/dr) = 0$
- 压强梯度沿流向持续输入动量
- 黏性把动量输运到壁面
- 壁面剪切承担相应的动量通量
- 稳态充分发展 = 压强驱动与黏性输运平衡

整体控制体平衡 (圆管为例)

$$\Delta p \cdot \pi R^2 = |\tau_w| \cdot 2\pi RL$$

$$|\tau_w| = \frac{R}{2} \frac{\Delta p}{L}$$

- 取长度L、半径R的圆柱形控制体
- 入口出口压强净推力 = 壁面剪切阻力
- 结果与从速度梯度计算完全一致

方法论启示：两种方法应相互验证

- 同一个物理关系（壁面剪切与压降的关系）可以从两条完全不同的路径得到：
- 路径一（局部微分法）：写出NS方程→简化→求解速度分布→求导得剪切应力→代入壁面位置
- 路径二（整体积分法）：取控制体→分析受力→应用动量守恒→直接得到壁面剪切与压降关系
- 两种方法得到相同结果，这是对推导正确性的有力验证
- 在工程实践中，整体动量平衡往往更简单——不需要知道速度分布的细节就能得到壁面剪切
- 但整体方法无法给出速度分布的细节——需要局部微分方法才能获得流场的完整信息
- CFD验证中也应同时检查局部量（速度分布）和整体量（流量、压降、总阻力）

4.13 功率输入与黏性耗散

机械能去了哪里？

从动量平衡到能量平衡

前面主要从动量平衡角度理解经典黏性流动。本节进一步从机械能平衡角度考察同样的问题。对于不可压缩Newton流体，黏性应力会把有序的机械能不可逆地转化为内能。

一维平行流的黏性耗散率

$$\Phi = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

Φ 的量纲为 W/m^3 (单位体积单位时间的耗散功率)

能量流向

- 外界持续输入机械能 (壁面做功或压强做功)
- → 维持黏性流动 (动能)
- → 黏性耗散 (不可逆)
- → 内能 (温度升高)

稳态能量平衡原理

在稳态黏性流动中，流体的动能不随时间变化，因此外界输入的机械功率必须恰好等于流体内部的黏性耗散功率。这是能量守恒定律在黏性流动中的直接体现，也是第1章所强调的“黏性不仅负责动量输运，也会不可逆地耗散机械能”的具体数学表达。

Couette 流：壁面做功等于黏性耗散

运动壁面输入的机械功恰好补偿耗散

推导过程

- 速度： $u(y) = Uy/h$
- 速度梯度： $du/dy = U/h$ (常数)
- 耗散率： $\Phi = \mu(U/h)^2 = \mu U^2/h^2$ (常数)
- 单位壁面面积总耗散： $\int_0^h \Phi dy = \mu U^2/h$
- 壁面剪切应力： $\tau_w = \mu U/h$
- 运动壁面单位面积机械功率： $P_A = \tau_w U = \mu U^2/h$
- 两者相等！

能量平衡方程

$$\tau_w U = \int_0^h \Phi dy = \mu \frac{U^2}{h}$$

壁面功率 = 流体层总耗散功率

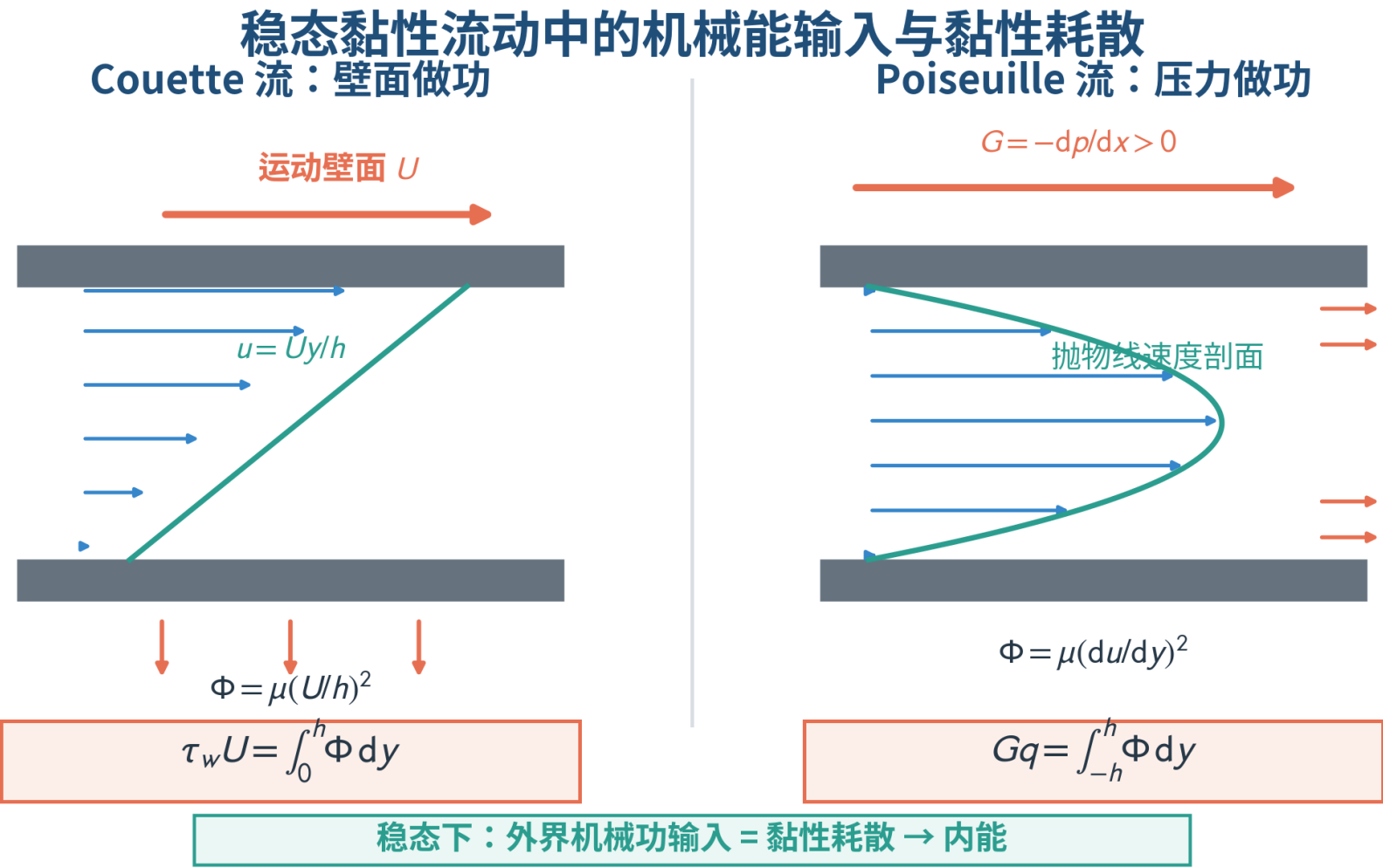
物理意义

- 运动壁面通过剪切应力对流体做功
- 这部分能量全部用于克服黏性阻力
- 最终转化为流体内能（如果不导出热量，流体会升温）
- 这就是为什么黏性流体在管道中流动会产生温升

工程联系：在润滑系统中，轴颈旋转（Couette效应）产生的黏性耗散是润滑油温升的主要原因。如果散热不良，油温升高会导致黏度下降，进一步影响润滑性能，可能导致润滑失效。因此润滑系统设计必须同时考虑流体动力学和热管理——这是航空发动机轴承润滑系统设计的核心问题之一。

Poiseuille 流：压强做功等于黏性耗散

两种驱动机制，同一个能量平衡原理



统一的物理图像：机械能 $\rightarrow$ 黏性耗散 $\rightarrow$ 内能

本章稳态黏性流动的能量视角总结

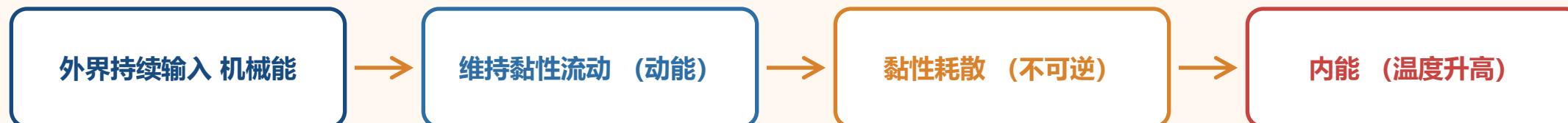
路径一：运动壁面做功

- Couette 流： $\tau_w U = \int \Phi dy$
- 旋转黏度计：黏性力矩消耗功率
- 润滑流动：轴颈旋转产生耗散
- 壁面通过剪切应力直接对流体做功

路径二：压强场做功

- 平面 Poiseuille： $Gq = \int \Phi dy$
- 圆管 Hagen-Poiseuille： $\Delta p \cdot Q = \text{耗散功率}$
- 管道输运：泵提供的功率用于克服黏性阻力
- 压强降推动流体，黏性将动能转化为内能

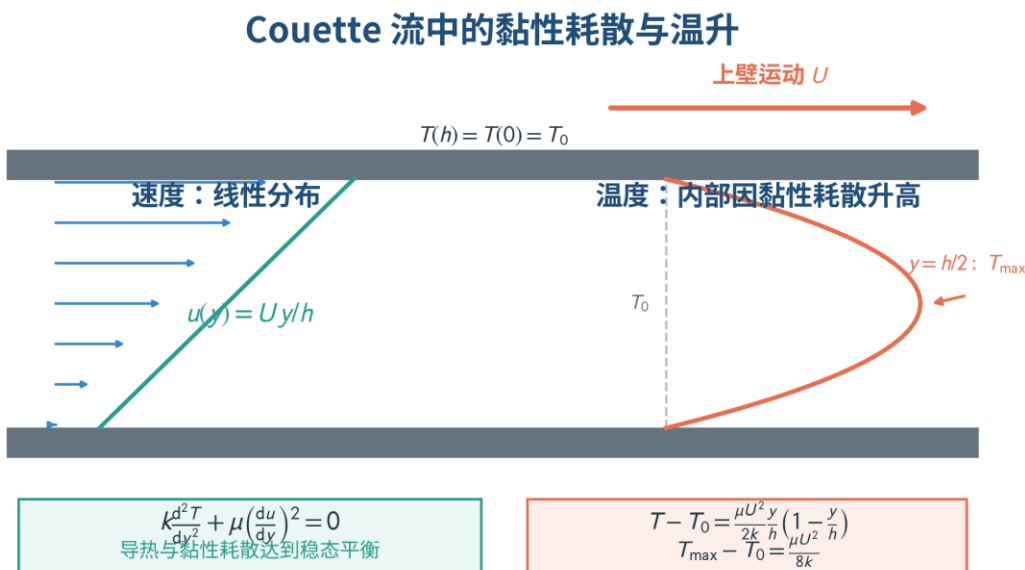
统一能量图像



这与第1章所强调的认识一致：黏性不仅负责动量输运，也会不可逆地耗散机械能。动量视角回答“流体如何运动”，能量视角回答“维持运动需要多少能量、能量去了哪里”。两个视角的统一是完整理解黏性流动的关键。

4.14 拓展：Couette 流中的黏性耗散与温升

机械能转化为内能的直接温度表现



即使两壁温度相同，流体内部仍可因黏性耗散而更热。

两壁等温时速度线性但温度抛物线分布

能量方程与温度分布

$$k_T \frac{d^2 T}{dy^2} + \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = 0$$

边界条件： $T(0) = T_w$, $T(h) = T_e$

$$T(y) = T_w + (T_e - T_w) \frac{y}{h} + \frac{\mu U^2}{2k_T h} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right)$$

- 第一项：两壁温差产生的线性导热部分
- 第二项：黏性耗散产生的额外温升（抛物线）
- Brinkman数 $Br = \mu U^2 / (k_T |T_e - T_w|)$ 判断耗散是否重要
- $Br \ll 1$ 时黏性耗散可忽略，温度线性分布

两壁等温情形：没有外加温差，内部仍然升温

黏性耗散的最直接证据

$$T - T_0 = \frac{\mu U^2}{2k_T} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right)$$

温度分布特征

- 温度呈抛物线分布（与速度分布形状不同）
- 最大值位于 $y = h/2$ （间隙中心）
- 最大温升： $T_{\max} - T_0 = \frac{\mu U^2}{8k_T}$
- 两壁处 $T = T_0$ （满足边界条件）
- 温度处处高于或等于壁温

物理意义

- 即使两壁温度完全相同，流体内部仍可因为黏性耗散而比两壁更热
- 这正是「机械能不可逆地转化为内能」在温度场中的直接体现
- 热量从流体内部（高温区）向两侧壁面（低温区）传导
- 稳态下：黏性产热率 = 热传导导出率

工程意义与课程思政

- 高速滑动轴承中，黏性耗散产生的热量如果不能及时导出，会导致油温显著升高
- 油温升高→黏度下降→承载能力降低→可能导致接触磨损→轴承失效
- 因此高速轴承润滑系统必须配备冷却系统，这是航空发动机和燃气轮机设计中的关键技术
- 课程思政：工程设计必须考虑多物理场耦合（流体力学+传热学+材料力学），单一学科的优化可能导致系统失效。我国在高端轴承制造领域仍面临「卡脖子」问题，需要力学、材料、制造等多学科协同创新。

4.15 无量纲速度剖面的普适性

有量纲参数决定大小，无量纲形式揭示结构

Couette 流

$$u^* = y^*$$

剖面形状：直线
所有参数下归一化后重合

平面 Poiseuille 流

$$u^* = 1 - y^{*2}$$

剖面形状：抛物线
所有参数下归一化后重合

圆管 Poiseuille 流

$$u^* = 1 - r^{*2}$$

剖面形状：抛物线
所有参数下归一化后重合

无量纲化的真正目的

- 不是机械地代换变量、整理方程，而是揭示不同物理机制为什么形成无量纲参数
- 有量纲参数 ($U, h, \mu, dp/dx, R$ 等) 决定实际的速度大小和长度尺度
- 无量纲形式揭示解的共同结构——同一类流动不管参数如何，都具有相同的剖面形状
- 这正是第3章无量纲化思想在解析解中的直接体现
- 在实验和CFD中，无量纲剖面是比较不同工况结果的标准方式——只要无量纲参数相同，流动就相似
- Reynolds数是最著名的无量纲参数——它决定了惯性和黏性的相对重要性，从而决定流动形态

4.16 经典解的适用条件

一个解析公式最重要的部分是它成立的条件

Hagen–Poiseuille 解的成立条件

- 圆管笔直（无弯曲、无分叉）
- 截面恒定（无收缩、无扩张）
- Newton 流体（应力-应变成线性关系）
- 不可压缩（密度为常数）
- 稳态（不随时间变化）
- 层流 ($Re_D < \text{约} 2300$)
- 充分发展（入口段已结束）
- 无滑移（壁面速度为零）
- 黏度为常数（不随温度/压强变化）

条件不满足时会发生什么

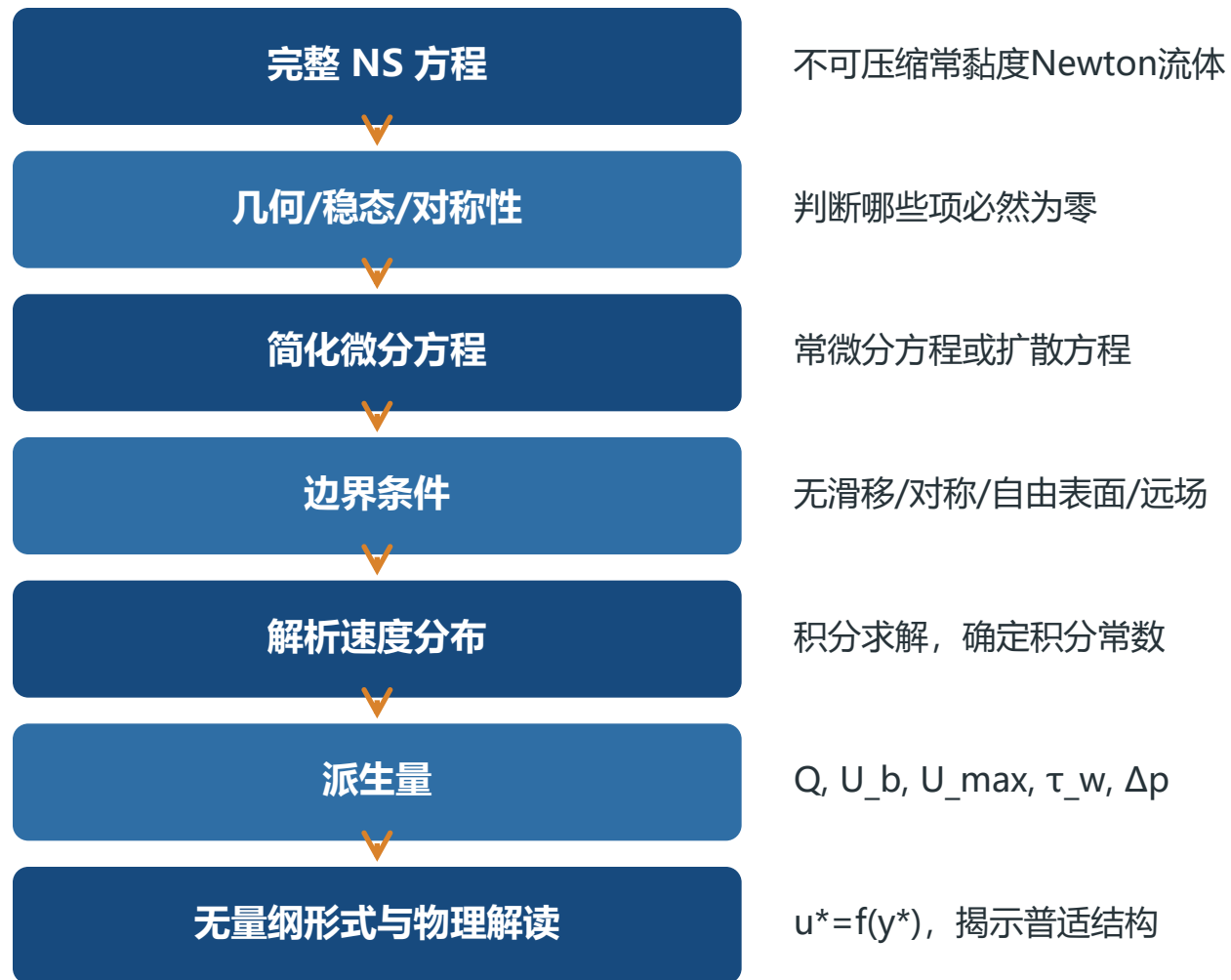
- 入口发展段：速度剖面沿流向变化，不是抛物线
- 管径快速变化：流动分离、二次流
- 强非稳态：脉动流、水锤效应
- 非Newton流体：幂律流体、Bingham流体剖面不同
- 湍流：速度剖面变饱满（对数律），阻力增大
- 壁面滑移：超疏水表面、气体润滑
- 强温度依赖黏度：黏度变化改变剖面形状

核心原则：不要脱离假设使用公式

- 一个解析公式最重要的部分，不只是结果本身，还包括它成立的条件
- 工程中使用经典公式前，必须逐项检查假设条件是否满足
- 如果条件不完全满足，应评估偏差大小，判断公式是否还能作为近似参考
- 偏差较大时，应使用更通用的模型（如湍流经验公式、CFD数值模拟）
- 这是工程师科学素养的基本要求——知道每个公式的适用边界，比记住公式本身更重要

4.17 本章的统一思路

一套方法处理所有问题



4.18 本章小结

14条核心结论

1. 经典解析解的价值首先在于展示如何简化NS方程。定常充分发展单向流可化为共同线性母方程 $\mu \nabla^2 u = dp/dx = \text{常数}$
2. 平面Couette流由运动壁面驱动, $u(y)=Uy/h$, 剪切应力为常数 $\tau=\mu U/h$
3. 同轴圆柱Couette流有保留曲率的精确解, 窄间隙旋转黏度计公式只是其工程极限 ($\delta/R_i \ll 1$)
4. 平面Poiseuille流由压强梯度驱动, $u(y)=-(dp/dx)(h^2-y^2)/(2\mu)$, 抛物线分布, $U_{\max}=3U_b/2$
5. Couette-Poiseuille流是壁面剪切与压强驱动的线性叠加, 逆向压梯足够强时可产生局部回流
6. 圆管Hagen-Poiseuille流 $u(r)=-(dp/dz)(R^2-r^2)/(4\mu)$, $U_{\max}=2U_b$
7. 圆管流量-压降关系 $Q=(\pi R^4/8\mu)(\Delta p/L)$, $Q \propto R^4$ 是极其重要的尺度关系
8. 圆管层流Darcy摩擦系数 $f_D=64/Re_D$ (注意与Fanning摩擦系数差4倍)
9. 重力驱动液膜由重力与黏性平衡控制, 固壁无滑移+自由表面零剪切共同决定速度剖面
10. Stokes第一问题满足动量扩散方程 $\partial u/\partial t = \nu \partial^2 u/\partial y^2$, 黏性影响厚度 $\delta \sim \sqrt{\nu t}$
11. Stokes第二问题展示振荡动量的黏性穿透, 穿透深度 $\delta_s = \sqrt{2\nu/\Omega}$
12. 稳态Couette流中壁面做功等于黏性耗散; 稳态Poiseuille流中压强做功等于黏性耗散
13. (拓展) Couette流中黏性耗散可直接引起温升, 即使两壁等温, 内部仍可形成抛物线温度分布
14. 无量纲速度剖面揭示解的普适结构, 而不是具体工况的数值大小

知识回顾与能力回顾

学完本章，你应该能够.....

核心概念回顾

- 定常充分发展单向流的母方程
- 无滑移条件与自由表面零剪切条件
- 壁面剪切应力的符号与外法向约定
- 线性叠加原理（特殊流动简化后的性质）
- 动量扩散与黏性穿透深度
- 黏性耗散与机械能平衡
- 完整方程精确解 vs 近似模型基准解
- 无量纲剖面的普适性
- Brinkman数与黏性加热
- Darcy vs Fanning摩擦系数

能力回顾

- 判断：给定流动假设，能指出NS方程中哪些项为零
- 估算：给定管径和压差，估算流量和壁面剪切
- 推导：从完整NS方程出发，推导典型流动的速度分布
- 计算：用解析解计算流量、平均速度、最大速度、剪切应力
- 解释：说明速度剖面形状的物理原因和极限行为
- 比较：区分不同驱动机制和边界条件下的流动特征
- 验证：用Poiseuille解析解检查CFD程序的正确性
- 判断：评估经典解析公式在实际工程中的适用条件
- 无量纲化：将有量纲解转化为普适的无量纲形式
- 能量分析：计算黏性耗散功率并判断温升的重要性

易错点回顾

这些错误最常见，也最容易在考试和工程中出问题

几何约定混淆	平面Poiseuille流中 h 是半间距还是总间距？不同教材定义不同，流量公式差8倍。使用前必须确认 h 的定义。
壁面剪切符号错误	内部应力分量 τ_{xy} 的符号 $\neq$ 壁面牵引方向。必须通过外法向 n_f 判断： $t = \sigma \cdot n$ 。两侧壁面的外法向相反。
摩擦系数混淆	Darcy摩擦系数 $f_D = 64/Re$ ，Fanning摩擦系数 $f_F = 16/Re$ ，两者差4倍。工程文献中两种都常见，使用前必须确认。
叠加原理滥用	线性叠加只在单向充分发展流中成立（因为非线性对流项消失）。一般NS流动中不能直接叠加不同驱动的解。
精确解与近似解混淆	窄间隙旋转黏度计公式是工程近似，不是任意间隙下的圆柱精确解。使用前必须检查 $\delta/R_i \ll 1$ 。
$t \rightarrow 0$ 奇异性误解	Stokes第一问题中 $t \rightarrow 0$ 时壁面剪切趋于无穷大，这来自「瞬时启动」的理想化假设，实际系统中平板有加速度，不会产生无穷大剪切。

形成性评价

检查你是否建立了控制方程—尺度—边界条件—流动图像—工程意义的关联

第1题（概念判断）

判断正误并说明理由："因为完整Navier-Stokes方程是非线性的，所以Couette流和Poiseuille流的解不能线性叠加。"

第2题（尺度估算）

水在半径1mm的圆管中做层流流动，平均速度0.1m/s，黏度 $1\text{e-}3\text{ Pa}\cdot\text{s}$ 。估算：(1) Re_D ；(2)最大速度；(3)壁面剪切应力；(4)单位长度压降。

第3题（物理图像）

画出Couette-Poiseuille组合流在以下三种情况下的速度剖面示意图：(1) $\text{dp}/\text{dx}=0$ ；(2) $\text{dp}/\text{dx}<0$ （有利压梯）；(3) $\text{dp}/\text{dx}>0$ 且足够大（不利压梯导致回流）。标注关键点。

第4题（工程判断）

某工程师用Hagen-Poiseuille公式计算汽车发动机润滑油管路的压降。请列出至少3个需要检查的假设条件，并说明如果不满足可能导致什么偏差。

课后任务与下章衔接

巩固本章，展望后续

课后任务

- 必做题 (★) : 4.1-4.8, 4.9-4.15, 4.27-4.29, 4.30
- 选做题 (★★) : 4.16-4.18, 4.19-4.26, 4.31-4.33
- 研究训练 (★★★) : 4.27-4.29综合计算
- 思考与讨论: 12道开放性问题, 任选3道写简短分析
- CFD实践: 用Poiseuille解析解验证一个简单CFD程序
 - - 检查速度场 E_∞ 和 E_2 误差
 - - 检查壁面剪切的收敛阶
 - - 尝试不同网格密度观察收敛行为
- 预习第5章: 低Reynolds数流动 (Stokes流)

下章衔接: 第5章 低Reynolds数流动

- 本章精确解大多假设充分发展, Reynolds数不直接出现在解中
- 第5章将研究 $Re \ll 1$ 的极限: 惯性项可以完全忽略
- Stokes方程的线性性质、可逆性、阻力公式
- 球绕流的Stokes解 (阻力 $f = 6\pi\mu aU$)
- 本章的Hagen-Poiseuille解是低Re管流的特例

更远展望: 第6章 边界层理论

- $Re \gg 1$ 时黏性不消失, 而是集中在很薄的近壁区域
- 本章Stokes第一问题的 $\delta \sim \sqrt{\nu t}$ 为边界层厚度标度提供直觉
- 边界层方程的推导、尺度分析、数量级估计
- 流动分离、尾流与阻力——逆压梯度的作用
- 本章Couette-Poiseuille流中的回流现象是分离的雏形

黏性流体力学 · 第4章

Navier–Stokes 方程的 典型精确解

本章最重要的学习原则：

不要只学公式，要学公式背后的物理作用。

不要只给解，要解释解的流动图像。

不要只做无量纲化，要解释不同物理机制为什么形成无量纲参数。

授课教师：徐翱